数理解析研究所講究録 1251 巻 2002 年 37-41

Hochschild cohomology of orders

眞田　克典 (Sanada, Katsunori)
東京理科大学理学部数学教室
(Department of Mathematics, Science University of Tokyo)

Abstract. Let $\Lambda = R[E_{11}, \dots, E_{mm}, X]$ be a subring of $M_m(R)$, the ring of $m \times m$-matrices with entries in a commutative ring R, where X is a certain matrix such that $X^m = a$ for a nonzero divisor $a \in R$. We give a periodic Λ^e-projective resolution of period 2. Using it, we calculate the Hochschild cohomology $HH^*(\Lambda)$ of the R-algebra Λ. A hereditary order of a central simple algeba is an example of such Λ.

1 序論

多元環の Hochschild cohomology を計算することは, 一般に非常に困難であるといわれています。体上の多元環に関しては, 例えば [EH] にあるように, self-injective Nakayama algebra の場合などが得られていますが, その方法は, 実際に両側加群としての projective resolution を求めて, それを用いて計算するという方法です。上の多元環の場合, 周期的 projective resolution を持つことがわかるので, その Hochschild cohomology の計算は煩雑ではあれ, 可能です。その他, [EHS], [ES], [H] で扱われている多元環はすべて周期的 projective resolution をもつものです。つまり, (ある多元環について, もし存在するなら, その) 周期的 projective resolution を見つけることがポイントとなります。

ここでは, 主結果として, 可換環 R 上の全行列環 $M_m(R)$ の部分多元環 $\Lambda = R[E_{11}, E_{22}, \dots, E_{mm}, X]$ (ここで, E_{ij} は行列単位, X は

$$X := \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & a_{m-1} \\ a_m & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times m},$$

a_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ は R の非零因子とします) が周期 2 の projective resolution を持つことを述べ, そして, その Hochschild cohomology 環 $HH^*(\Lambda) := \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathrm{Ext}^i_{\Lambda^e}(\Lambda, \Lambda)$ を計算します。なお, この resolution は上記 self-injective Nakayama algebra の特別な場合と非常によく似ており, それについても触れます。これらは S. König, N. Snashall との共同研究によるものです。

次章以下, いくつかの order に関してその Hochschild cohomology を紹介し, 上記行列環を扱うに至った背景を述べます (§2)。そして, この行列環の周期 2 の projective resolution を述べ (§3), 最後にある特別な self-injective Nakayama algebra のもつ周期的 projective resolution を紹介します

2 いくつかの order の Hochschild cohomology の例

1. Integral group rings
任意の有限群 G に対して，$\Lambda = \mathbb{Z}G$ とする。Λ は $\mathbb{Q}G$ の $\mathbb{Z}$-order である。任意の左 Λ^e(両側 Λ) 加群 M に対して，次の同型が成り立つ:

$$H^r(\Lambda, M) \cong H^r(G, {}_{\psi}M).$$

ここで，左辺は Λ の Hochschild cohomology，右辺は群 G の通常の cohomology を表す。${}_{\psi}M$ は G による conjugation で左 G 加群と見なした M を表す。この同型は，両辺の cup 積を保存しているので，特に環としての同型

$$HH^*(\mathbb{Z}G) \cong H^*(G, {}_{\psi}\mathbb{Z}G)$$

が成り立つ ([NSa])。すなわち，群環の場合，通常の群の cohomology に帰着される。

2. Rings of algebraic integers
Rings of algebraic integers in quadratic fields: m を任意の平方因子を含まない整数とする。$\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ の $\mathbb{Z}$-order $\Lambda = \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ を考える。このとき，Λ に対して，次の周期 2 の projective resolution が存在する:

$$\cdots \xrightarrow{\delta} \Lambda\otimes\Lambda \xrightarrow{\sigma} \Lambda\otimes\Lambda \xrightarrow{\delta} \Lambda\otimes\Lambda \xrightarrow{u} \Lambda \to 0.$$

ここで，$u(1\otimes 1) = 1$, $\delta(1\otimes 1) = 1\otimes\sqrt{m} - \sqrt{m}\otimes 1$, $\sigma(1\otimes 1) = 1\otimes\sqrt{m} + \sqrt{m}\otimes 1$ とする。これを用いて，$HH^*(\Lambda) = \Lambda[x]/(2\sqrt{m})$, $\deg x = 2$, を得る。

The rings of algebraic integers in cyclotomic fields: 任意の素数 p に対して，$\zeta = \zeta_p$ を 1 の原始 p 乗根とする。$\mathbb{Q}(\zeta)$ の整数環を $\Lambda = \mathbb{Z}[\zeta]$ とおく。このとき，次の周期 2 の projective resolution が存在する:

$$\cdots \xrightarrow{\delta} \Lambda\otimes\Lambda \xrightarrow{\sigma} \Lambda\otimes\Lambda \xrightarrow{\delta} \Lambda\otimes\Lambda \xrightarrow{u} \Lambda \to 0.$$

ここで，$u(1\otimes 1) = 1$, $\delta(1\otimes 1) = 1\otimes\zeta - \zeta\otimes 1$, $\sigma(1\otimes 1) = \sum_{j=0}^{p-2}(\sum_{i=0}^{p-j-2}\zeta^i)\otimes\zeta^j$ とする。これを用いて，$HH^*(\Lambda) = \Lambda[x]/\left((1-\zeta)^{p-2}x\right)$, $\deg x = 2$, を得る。ここで，$1-\zeta$ は Λ の素元であることに注意する。

なお，[H] によって，可換環 k 上の多項式環 $k[X]$ に対して，任意の多項式 $f(X)$ による剰余環 $k[X]/(f)$ が k-algebra として，周期 2 の projective resolution をもつことが示されており，これから上記の結果を得ることもできる。

3. An integral quaternion algebra
Λ を $\mathbb{Z}$ 上の四元数環とする: $\Lambda = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}i\oplus\mathbb{Z}j\oplus\mathbb{Z}k$, $i^2 = j^2 = -1, ij = k = -ji$. このとき，

$$HH^*(\Lambda) = \mathbb{Z}[x,y,z]/(2x, 2y, 2z, x^2+y^2+z^2), \deg x = \deg y = \deg z = 1$$

であることがわかる ([Sa1])。

4. Maximal orders および hereditary orders (local case)
R を，π を素元とし，$R/(\pi)$ が有限体であるような完備離散付値環とする。K を R の商体とし，A を index $n \geqslant 1$ の central simple K-algebra とする。このとき，A は，ある division K-algebra D 上の行列環 $M_m(D)$ に同型となる。ここで，D は cyclic algebra $(W/K, \sigma, \pi) = \bigoplus_{i=0}^{n} W\Pi^i$, $\Pi^n = \pi$, に同型となる。ただし，W/K は Galois 群 $G = \langle\sigma\rangle$ をもつ次数 n の不分岐拡大である。いま，S を W の付値環とするとき，R-algebra $\Delta = \bigoplus_{i=0}^{n-1} S\Pi^i$ は D の一意的な maximal order となる。そして，$(\Pi) = \Delta\Pi = \Pi\Delta$ は Δ の一意的な極大両側 ideal である。

Maximal orders: $A = M_m(D)$ のすべての maximal R-order は

$$\Lambda = M_m(\Delta) = \begin{bmatrix} \Delta & \cdots & \Delta \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta & \cdots & \Delta \end{bmatrix}$$

に同型となる。R-algebra Λ は R-algebra Δ に Morita equivalent なので，同型 $HH^*(\Lambda) \cong HH^*(\Delta)$ を得る。さて，Δ は次の周期的 projective resolution をもつことがわかっている ([Sa2]):

$$\cdots \xrightarrow{\delta} \Delta\delta_0\Delta \xrightarrow{\sigma} \Delta\delta_1\Delta \xrightarrow{\delta} \Delta\delta_0\Delta \xrightarrow{u} \Delta \to 0.$$

上で $\delta_0 = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$, $\delta_1 = \sum_{i=1}^n x_i^\sigma \otimes y_i$. ただし，$(x_i, y_i)_{i=1}^n$ は，$T_{W/K}(x_i y_i) = \delta_{i,j}$, $\sum_{i=1}^n x_i^\tau y_i = \delta_{\tau,1}$ を満たす，S の R-bases の pair とする。また，$u(1\otimes 1) = 1$, $\delta(1\otimes 1) = \Pi\otimes 1 - 1\otimes\Pi$, $\sigma(1\otimes 1) = \sum_{i=0}^{n-1} \Pi^i \otimes \Pi^{n-i-1}$ とおいた。これを用いて，$HH^*(\Delta) = R[x]/(\pi x)$, $\deg x = 2$, がわかる。なお，加群の構造については [B] で知られていた。

Hereditary orders: A のすべての hereditary order は次の行列環に同型である:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} (\Delta) & \cdots & \cdots & (\Delta) \\ (\Pi) & (\Delta) & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (\Pi) & \cdots & (\Pi) & (\Delta) \end{bmatrix}^{\{m_1, m_2, \ldots, m_r\}}.$$

ここで，invariants $\{m_1, m_2, \ldots, m_r\}$ は対角線上のブロック行列のサイズを表す。r を type とよぶ。さて，type r をもつ hereditary order は type r, invariants $\{1, 1, \ldots, 1\}$ をもつ basic な hereditary order に Morita equivalent であることがわかる。従って，Hochschild cohomology は basic なものに限って考えればよい。ところで，basic な hereditary order は Frobenius 的なので，完備 Hochschild cohomology ring を構成することができ，それが 2 次の可逆元をもつことから，Hochschild cohomology は周期 2 であることがわかる ([Sa2])。(このことから，hereditary order は周期 2 の projective resolution をもつであろうことが想像されるが，特別の場合には，次章で述べるように実際にそうである。)

3 ある行列環の周期的 projective resolution

可換環 R 上の全行列環 $M_m(R)$, $m \geqslant 2$, の部分多元環 $\Lambda = R[E_{11}, E_{22}, \ldots, E_{mm}, X]$ を考える。ここで，E_{ij} は行列単位，X は

$$X := \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & a_{m-1} \\ a_m & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times m},$$

a_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ は R の非零因子とする。この章では，Λ が周期 2 の projective resolution を持つことを述べ，そして，その Hochschild cohomology 環 $HH^*(\Lambda) := \bigoplus_{i\geqslant 0} \mathrm{Ext}^i_{\Lambda^e}(\Lambda, \Lambda)$ を計算する。

前章4節の notation（R は完備離散付値環，π をその素元）を用いて，上の Λ で与えられる order の形の例を記しておく：

例 1. 例えば，$m = 2, m = 3$ の場合は次のような tiled order となる：

$$\begin{bmatrix} R & \pi^{s_1} \\ \pi^{s_2} & R \end{bmatrix} \text{ if } m = 2, \qquad \begin{bmatrix} R & \pi^{s_1} & \pi^{s_1+s_2} \\ \pi^{s_2+s_3} & R & \pi^{s_2} \\ \pi^{s_3} & \pi^{s_1+s_3} & R \end{bmatrix} \text{ if } m = 3.$$

例 2. また，

$$\text{If } X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ \pi^s & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \text{ then } \Lambda = \begin{bmatrix} R & \cdots & \cdots & R \\ \pi^s & R & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \pi^s & \cdots & \pi^s & R \end{bmatrix}.$$

したがって，特に $s = 1$ のときは hereditary order となる。

左 Λ^e-projective modules を次のように定義する：

$$P_0 = \bigoplus_{i=1}^{m} \Lambda E_{ii} \otimes E_{ii}\Lambda, \quad P_1 = \bigoplus_{i=1}^{m} \Lambda E_{ii} \otimes E_{i+1,i+1}\Lambda,$$

そして，左 Λ^e-homomorphisms $\delta : P_1 \to P_0$, $\sigma : \Lambda \to P_1$ を

$$\delta\,(E_{ii} \otimes E_{i+1,i+1}) = E_{ii}\,(1 \otimes X - X \otimes 1)\,E_{i+1,i+1},$$

$$\sigma(E_{ii}) = E_{ii}\left(\sum_{k=0}^{m-1} X^k \otimes X^{m-k-1}\right) E_{ii} \text{ for } 1 \leqslant i \leqslant m.$$

で定義する。$u : P_0 \to \Lambda$ は multiplication map とする。そのとき

定理 A. 次の左 Λ^e 加群の exact sequence が存在する：

$$0 \to \Lambda \xrightarrow{\sigma} P_1 \xrightarrow{\delta} P_0 \xrightarrow{u} \Lambda \to 0.$$

定理 B. Λ の Hochschild cohomology ring は

$$HH^*(\Lambda) = R[x]/(ax), \quad \deg x = 2,$$

となる。ただし，$a := a_1 a_2 \cdots a_m$ とおいた。

4 Self-injective Nakayama algebra の周期的 projective resolution

[EH] に述べられている，basic self-injective Nakayama algebra の周期 2 の projective resolution を紹介する。

K を体，$m \geqslant 2$ とする。basic self-injective Nakayama K-algebra は次の形をしている:

$$KQ/I := B_m^k (=: B).$$

ただし，Q は m 個の vertex と m 個の arrow をもつ，すべて同じ向きの circular quiver，また，I は少なくとも長さ $k \geqslant 2$ のすべての path で生成されるイデアルである。ここで，vertex を $e_1, e_2, \ldots, e_m$，arrow を $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ とし，$X = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_m$ とおく。そのとき，最初の二つの step が次のようになる，B^e-projective resolution を取ることができる:

$$0 \to \Omega^2 B \to P_1 \xrightarrow{\delta} P_0 \xrightarrow{u} B \to 0.$$

ここで，

$$P_0 = \bigoplus_{i=1}^{m} Be_i \otimes e_i B, \quad P_1 = \bigoplus_{i=1}^{m} Be_i \otimes e_{i+1} B \quad (e_{m+1} := e_1)$$

とおいた。また，B^e 同型 $\Omega^2 B \cong {}_1B_{\beta^{\bar{k}}}$ が存在する。ただし，$k = mq + \bar{k}$ $(0 \leqslant \bar{k} < m)$, $\beta : B \to B$ は $e_i \mapsto e_{i-1}$, $\nu_i \mapsto \nu_{i-1}$ なる自己同型を表す。Nakayama 自己同型は $\beta^{\bar{k}-1}$ で与えられる。例えば $m = k$ のときは，$\bar{k} = 0$。したがって，${}_1B_{\beta^{\bar{k}}} = {}_1B_1$ なので，B は周期 2 の B^e-projective resolution をもつことがわかる。(以上 [EH])。

さて，この同型をとおして上の sequence を書き換えると次を得る:

$$0 \to {}_1B_{\beta^{\bar{k}}} \xrightarrow{\sigma} P_1 \xrightarrow{\delta} P_0 \xrightarrow{u} B \to 0.$$

ここで，u は multiplication. また，δ, σ は次によって引き起こされることがわかる:

$$\delta(e_i \otimes e_{i+1}) = e_i(1 \otimes X - X \otimes 1)e_{i+1}, \quad \sigma(1) = \sum_{j=0}^{m-1} X^j \otimes X^{m-j-1}.$$

これは，**定理 A** の sequence とほとんど同じ形である。

参考文献

[B] F. R. Bobovich, Cohomologies of maximal orders of simple central algebras, *Math. Notes* **6** (1969), 589–592

[EH] K. Erdmann and T. Holm, Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n, *Forum Math.* **11** (1999), 177–201

[EHS] K. Erdmann, T. Holm and N. Snashall, Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n, II, *to appear*

[ES] K. Erdmann and N. Snashall, On Hochschild cohomology of preprojective algebras I, II, *J. Algebra* **205** (1998), 391–412, 413–434

[H] T. Holm, Hochschild cohomology rings of algebras $k[X]/(f)$, *Contributions to Algebras and Geometry* **41** (2000), 291–301

[NSa] T. Nozawa and K. Sanada, Cup products on the complete relative cohomologies of finite groups and group algebras, *Hokkaido Mathematical Journal* **28** (1999), 545–556

[Sa1] K. Sanada, On the Hochschild cohomology of crossed products, *Comm. Algebra* **21** (1993), 2727–2748

[Sa2] K. Sanada, Hochschild cohomology of minimal hereditary orders, *J. Algebra* **176** (1995), 786–805

162-0827 東京都新宿区若宮町 26

東京理科大学理学部数学教室

E-mail: `sanada@rs.kagu.sut.ac.jp`